DEVOIR DE CONTROLE N°2

EXERCICE N°1 :	10'	3 points

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

On désigne par Γ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et par (S) le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de Γ autour de l'axe $(O,\vec{i})$ où A et B sont deux points de Γ d'abscisses respectives 0 et 1.

Le volume $\mathcal{V}$ de (S) est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

2°) $\int_{-1}^{0}\sqrt{-x-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{8}$.

3°) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

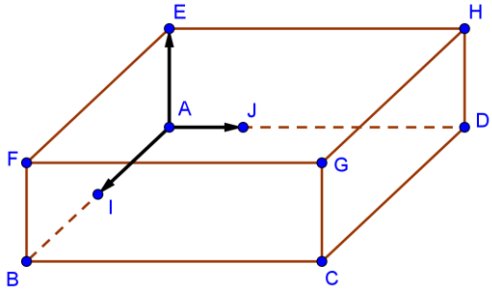
On considère deux points distincts A et B, pour tout point M de l'espace on a :

a) $(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

b) Si $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ alors M appartient au plan perpendiculaire à la droite (AB) en A.

EXERCICE N°2 :	30'	6 points

On a représenté ci-contre un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ dans un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AE})$.



- Le point B a pour coordonnées (2, 0, 0) ;
- Le point D a pour coordonnées (0, 4, 0) et K (2, 8, 1).

1°) a) Par lecture graphique, donner les coordonnées de G, H et C.

b) Déterminer les coordonnées du point L milieu de $[GH]$,

puis montrer que $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{BL}=-4\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}-8\overrightarrow{AE}$.

En déduire que les points K, E, L et B sont coplanaires

c) Calculer la distance du point E à la droite (BL).

2°) Soit M un point de $[CB]$ vérifiant $\overrightarrow{CM}=a\cdot\overrightarrow{CB}$ avec $a\in]0,1[$

a) Déterminer en fonction de a les coordonnées de M.

b) Déterminer le réel a pour que le volume du tétraèdre $MBEL$ soit égal à $\dfrac{1}{6}$

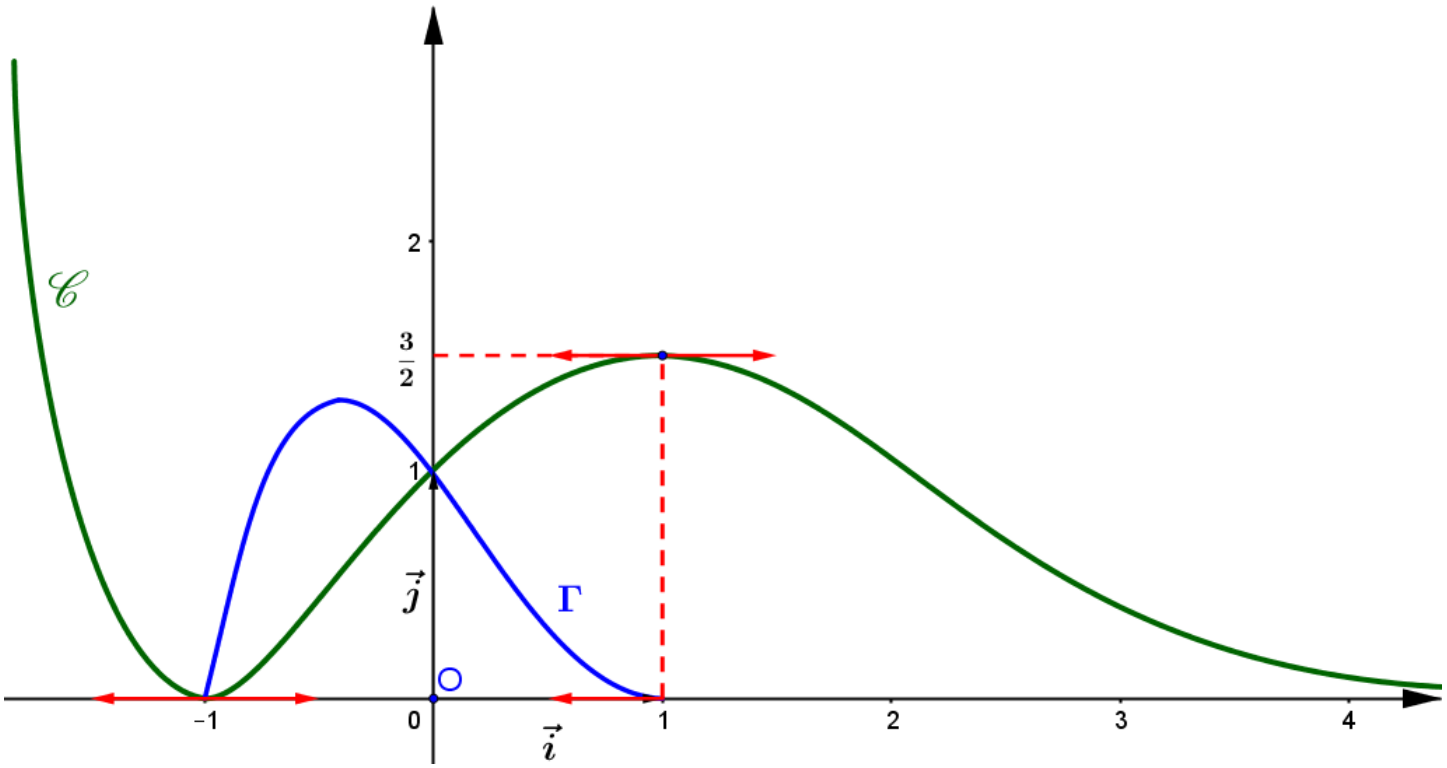
3°) On désigne par L' le milieu de $[CD]$.

Calculer l'aire du parallélogramme $AICL'$. En déduire le volume de la pyramide $AICL'E$.

EXERCICE N°3 :	20'	4 points	

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, représentatives respectivement d'une fonction *f* définie et dérivable sur *IR* et d'une fonction *g* définie et dérivable sur $[-1,1]$ telles que :

- $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- $(O,\vec{i})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



1°) Dresser le tableau de variation de *f*.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

3°) Pour tout $t\in[-1,1]$, l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la partie $S(t)$ du plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=t$ est déterminée par $\mathcal{A}(t)=f(t)$.

a) Hachurer $S(0)$ et déterminer $\mathcal{A}(0)$ puis $\mathcal{A}(1)$.

b) Montrer que qu'il existe un unique réel $t_0\in[-1,1]$ tel que $\mathcal{A}(t_0)=\dfrac{5}{6}\mathcal{A}(1)$.

c) Construire le point M_0 de Γ d'abscisse t_0.

EXERCICE N°4 :	40'	7 points	

Soit la suite (I_n) définie sur IN par : $I_0=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$ et $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx$, $n\geq 1$.

1°) Montrer que la suite (I_n) est convergente .

2°) Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(t)=\sqrt{1+t}$.

a) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a : $0\leq f'(t)\leq\frac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, on a : $0\leq f(x)-1\leq\frac{1}{2}x$.

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) a) À l'aide d'une intégration par partie, Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, $(2n+3)I_n+2nI_{n-1}=4\sqrt{2}$.

b) Calculer I_0 et I_1.

4°) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(x)=x\sqrt{1+x}$ .On désigne par (C_g) et (C_f).

Les courbes des fonctions g et f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer ,en ua , $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C_g) , (C_f) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$

b) On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Calculer $\mathcal{V}$ le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C_g) au tour de l'axe $(O,\vec{i})$.